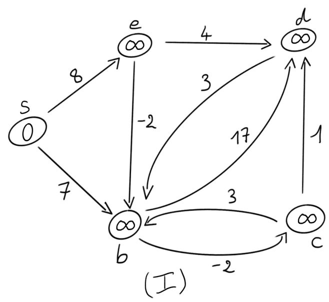
TD-1 : plus court chemin dans un graphe

Exercice 1. 1. *Appliquez l'algorithme de Bellman-Ford sur le graphe ci-dessous où s désigne le sommet source. Relaxez les arêtes dans un ordre différent que l'ordre choisi dans le polycopié et faites figurer l'évolution des attributs d et π dans un tableau.*

2. *Que change l'ordre de relaxation des arêtes ?*
3. *Donner un plus-court-chemin de s à d.*
4. *Recommencez mais cette fois sur le graphe G' identique au graphe ci-dessous sauf pour le poids de l'arête (c, b) qui devient* 1.



Exercice 2. *Prouvez que lorsque le graphe est donné sous forme de listes d'adjacence alors la complexité asymptotique de l'algorithme de Bellman-Ford est $O\left(|V|^2 + |V||E|\right)$ où V est l'ensemble des sommets du graphe et E l'ensemble de ses arêtes.*

Exercice 3. *Prouvez le lemme de Minoration 3.2 du polycopié qu'on rappelle ci-dessous :*

Lemme (Minoration)**.** *Après un appel à la procédure* INITIALIZE *sur G, et un nombre fini quelconque d'appels à la procédure* RELAX *sur les arêtes de G, on a $v.d \geq \delta(s, v)$ pour tout sommet $v \in V$. De plus, si $v.d$ atteint $\delta(s, v)$, il ne changera plus.*

Exercice 4 (Modélisation)**.** *On cherche à trouver une solution $(x_1, \ldots x_5) \in \mathbb{R}^5$ au système suivant :*

$$
\begin{aligned}
x_1 - x_2 &\leq 0 \\
x_1 - x_5 &\leq -1 \\
x_2 - x_5 &\leq 1 \\
x_3 - x_1 &\leq 5 \\
x_4 - x_1 &\leq 4 \\
x_4 - x_3 &\leq -1 \\
x_5 - x_3 &\leq -3 \\
x_5 - x_4 &\leq -3
\end{aligned}
$$

Considérons le graphe G qui comporte six sommets notés $v, x_1, x_2, \ldots, x_5$. Les arêtes de ce graphe sont définies comme suit : il existe des arêtes de v vers tous les autres sommets, chacune ayant un poids 0. *De plus, G contient une arête (x_i, x_j) de poids b si et seulement si la contrainte $x_j - x_i \leq b$ est présente dans le système d'inéquation ci-dessus.*

1. *Dessinez G et trouvez le poids d'un plus-court-chemin de v à tous les autres sommets.*
2. *Notons $d_1, d_2, \ldots d_5$ les poids d'un plus-court-chemin de v à x_1, de v à x_2, …, de v à x_5 trouvés à la question 1. Montrez que $(d_1, \ldots, d_5)$ est une solution au système d'inéquation ci-dessus.*

Soit $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ une matrice où chaque ligne comporte exactement un 1, un -1 et des 0 dans les autres cases. Soit $b \in \mathbb{R}^m$ et on s'intéresse au système d'inéquations $Ax \leq b$.

1. *En vous inspirant de l'exemple précèdent, décrivez un graphe G orienté pondéré associé au système $Ax \leq b$.*
2. *Prouvez que $Ax \leq b$ admet une solution si et seulement si G ne contient pas de cycle de poids strictement négatif.*
3. *Donnez un algorithme qui trouve une solution à $Ax \leq b$ s'il en admet, et qui renvoie Faux sinon.*

Exercice 5. *Soit $G = (V, E)$ un graphe orienté et pondéré qui ne contient pas de cycle de poids strictement négatif, et soit $s \in V$ "le sommet source". Pour un sommet $v \in V\backslash\{s\}$, on note m_v le nombre minimum de sommets d'un plus-court-chemin de s à v.*

1. *Soit $v \in V\backslash\{s\}$ un sommet. Montrez qu'après m_v itérations de l'algorithme de Bellman-Ford, on a $v.d = \delta(s, v)$.*
2. *Soit $m = \max_{v\in V\backslash\{s\}} m_v$. Modifiez l'algorithme de Bellman-Ford pour qu'il termine en $m + 1$ itérations, et ce sans connaître la valeur de m à l'avance.*