TD-2 : plus court chemin dans un graphe

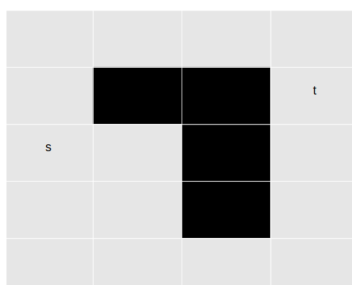
Exercice 1. *On considère la grille suivante sur laquelle on peut se déplacer en vertical et en horizontal avec un coût de 1 pour passer d'une case à une case voisine, et les cases noires ne sont pas accessibles. On veut trouver un plus-court-chemin de s à t. Appliquez l'algorithme de Dijkstra pour trouver un plus-court-chemin de s à t. Veuillez à faire le "pire" choix de sommet à explorer lorsqu'il y a un choix à faire. Quel est le nombre de sommets explorés.*

On définit trois fonctions d'estimation, h_e, h_m, et h_p sur l'ensemble des cases :

- *$h_e(u)$ est la distance Euclidienne de la case u à t.*
- *$h_m(u)$ est la distance de Manhattan de la case u à t, i.e., la distance en nombre de déplacement sur la grille s'il n'y avait pas de cases noires.*
- *$h_p(u)$ est la distance parfaite de la case u à t, i.e., la vrai distance de u à t.*

Pour chacune des trois fonctions d'estimation :

1. *Est-elle une borne inférieur de la vrai distance ? Prouvez votre réponse.*
2. *Est-elle consistante ? Prouvez votre réponse.*
3. *Si la réponse est oui aux deux questions précédentes, alors appliquez A^* avec cette fonction comme fonction d'estimation. Veuillez à faire le "pire" choix de sommet à explorer lorsqu'il y a un choix à faire. Quel est le nombre de sommets explorés.*



Exercice 2. *Soit $G = (V, E)$ un graphe orienté représentant un réseau de communication. Chaque arête $(u, v) \in E$ a un poids $0 < r < 1$ qui représente la probabilité que le canal (u, v) transmette l'information de u à v sans erreur. Donnez un algorithme qui trouve le chemin avec le plus grand probabilité de succès de transmission d'un sommet s à un sommet t.*

Exercice 3. *Soit $G = (V, E)$ un η-graphe orienté avec $\eta > 0$. Notons s le sommet source et t un sommet accessible depuis s. Soient $\widehat{h_1}$ et $\widehat{h_2}$ deux fonctions d'estimations vérifiant les deux hypothèses de borne inférieur et de consistance. On suppose que $\widehat{h_1}$ est un estimateur strictement plus fin que $\widehat{h_2}$:*

$$\forall v \in V,\ \widehat{h_1}(v) > \widehat{h_2}(v)$$

Notons A_1^* respectivement A_2^* l'algorithme A^* utilisant la fonction d'estimation $\widehat{h_1}$, respectivement $\widehat{h_2}$, sur le graphe G pour trouver un plus-court-chemin de s à t. On veut montrer que tout sommet exploré par A_1^* est aussi exploré A_2^*.

1. *Supposons par l'absurde qu'il existe un sommet exploré par A_1^* mais pas par A_2^*, et notons $u \in V$ le premier sommet que A_1^* a exploré et qui n'a pas été exploré par A_2^*. Montrez que u n'est pas le sommet source s.*
2. *Montrez que u a été marqué ouvert par A_2^*.*

3. *Notons d_2 le variable d utilisé par A_2^*. Montrez que A_2^* affecte $\delta(s,u)$ à $u.d_2$. (Indication : considérez la relaxation de l'arête qui a permis de marquer u ouvert)*
4. *Si on note $\widehat{f_2}$ la fonction d'évaluation utilisée par A_2^*. Montrez qu'au moment où u est marqué ouvert par A_2^*, on a $\widehat{f_2}(u) < \delta(s,t)$.*
5. *Montrez que l'inégalité de la question d'avant est toujours valide au moment où A_2^* marque t fermé.*
6. *Conclure.*

Exercice 4. *Prouvez que lorsque le graphe est donné sous forme de listes d'adjacence alors la complexité asymptotique de l'algorithme de Dijkstra est $O\left(|V|^2\right)$ où V est l'ensemble des sommets du graphe.*

Exercice 5. *Soit $G = (V, E)$ un η-graphe orienté avec $\eta > 0$, et t et s deux sommets tel que t soit accessible depuis s. Soit $\hat{h}$ une fonction d'estimation parfaite, i.e., pour tout $v \in V$, $\hat{h}(v) = \delta(v,t)$.*

1. *$\hat{h}$ est-elle consistante ?*
2. *Notons γ le nombre minimal de sommets sur un plus-court-chemin de s à t. Montrez que A^* explore au moins γ sommets pour trouvez un plus-court-chemin de s à t.*
3. *Donnez un exemple où A^* peut explorer strictement plus que γ sommets.*
4. *Donnez un exemple où A^* explore exactement γ sommets quelque soit le choix de sommet à explorer en cas de plusieurs choix possibles. Donnez une condition suffisante sur le graphe pour que cette situation se produise.*